关于“青蛙跳几次，一米一徘徊”概率问题的研究

清华大学附属中学 G1208 齐天博 张胤泰 指导教师 李劲松

【摘要】本文从一道简单的高中几何概型题目“一只青蛙跳三次，每次跳一米。请问青蛙落在距离原点 1 米以内的区域的概率是多少？”[1]出发，将该题目的步数、距离和所在维度扩展，通过递推和对上一步落点的情况的积分的方法，得到了 N 维跳 m 步，落点在距离原点 x 米以内的概率的表达式；并基于各点的概率虽为无穷小量，但是大小不同，提出了“概率场强度”这一表示各点概率相对大小的概念，并给出了二维空间内青蛙跳 m 步时各圆上的概率场强度表达式。

关键词：概率，几何概型，函数，多维空间。

● 平面跳两次之数学计算

青蛙第一步的落点一定在以起点为圆心，半径为 1 的圆周上。

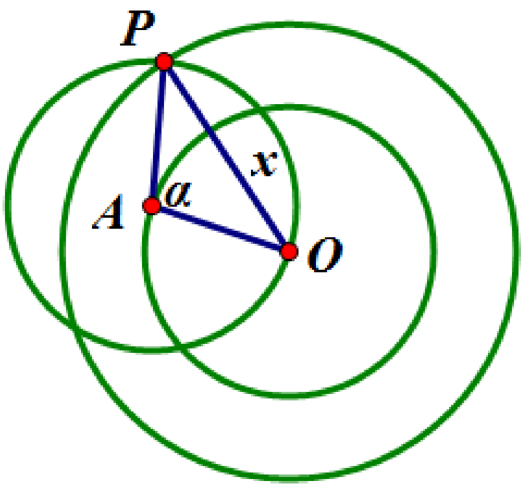

图 1

如图 1 所示，设起点为 0，第一步落点为 A。以第一步落点为圆心，1 为半径做圆 A，与以 0 为圆心 x 为半径的圆 0 交与点 P。当它向转动$\alpha \in [2\arcsin\frac{x}{2}, \pi]$时，青蛙回到圆内；同理，青蛙向左转也是转动$\alpha \in [2\,arcsin\frac{x}{2}, \pi]$时回到圆内。所以青蛙回到圆内的概率为$\frac{2arcsin\frac{x}{2}}{\pi}$.

[1] 本题出自 2010 年 AMC 12B。原题目为“A frog makes 3 jumps, each exactly 1 meter long. The directions of the jumps are chosen independently at random. What is the probability that the frog’s final position is no more than 1 meter from its starting position? (A)$\frac{1}{6}$ (B)$\frac{1}{5}$ (C)$\frac{1}{4}$ (D)$\frac{1}{3}$ (E)$\frac{1}{2}$”。

因此 $P_2(x)=\frac{2arcsin\frac{x}{2}}{\pi}$，定义域为[0, 2]，应用 Microsoft Mathematics 作图图像如图所示：

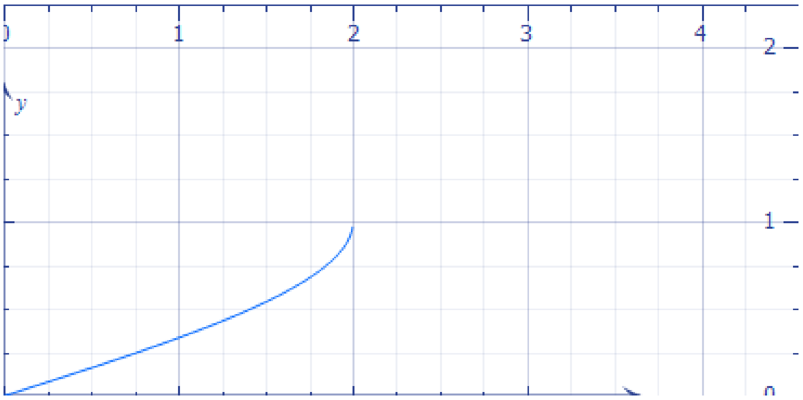

图 2

由上述计算可以发现，圆内概率大小随着圆的半径增大而增大，并且增长越来越快。这说明尽管落在任意一个 x∈ [0,2]的圆上的趋近与 0，但随着圆的半径的增大，落在圆上的概率也逐步递增。但是由于它们全都趋近与零，我们无法很好比较它们的大小。

对于任意半径为 x∈ [0,2]的圆来说，青蛙落在该圆上的概率为$dP_2(x) = P_2'(x)\cdot dx$。由于$P_2'(x)$的不同，青蛙落在个个圆上的概率也不同。青蛙落在某个圆上的概率大小与$P_2'(x)$有正比关系，因此我们可以用$P_2'(x)$来间接表示青蛙落在某个圆上的概率大小，即表示青蛙落在某个圆上的概率的相对大小，即平面青蛙跳 2 次概率场强度。

【定义】$P_n(x)$为平面青蛙跳 n 次概率函数，$Q_n(x) = {P_n}'(x)$为平面青蛙跳 n 次概率场强度函数，$x \in [0, n]$ 。

● 跳两次之计算机模拟

计算机模拟的优点时可以大量地模拟，重复地模拟。缺点是数据的精度并不是很准确，这势必会影响结果。 但是可以得到大体的一个趋势。

此处作者用两个 C++程序以及 Excel 进行模拟。生成数据的程序 1(见附录)（受到计算机性能等的影响，此程序精确到小数点后 3 位，一次性生成 10000 个数据）。数据如下：

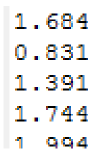
1.684
0.831
1.391
1.744

图 3

这些数据代表 10000 次模拟结果得到的离圆心的距离。然后再通过计算概率的程序 2(见附录)

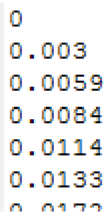
0
0.003
0.0059
0.0084
0.0114
0.0133

图 4

打开“result.txt”（如上图所示），该文本文件中一共有 201 行。从第一行到最后一行分别是距离原点 0 米，0.001 米，0.002 米……2.999 米，3.000 米的概率。然后将结果拷贝到 excel 当中，运用“图表工具”得到如下

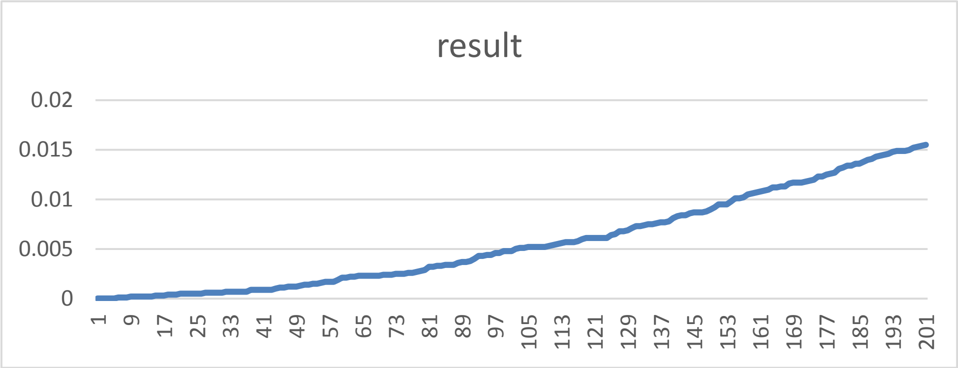

图 5

经过对比发现图 2 符合图 5 的规律，从而验证了这种方法的正确性。

- ## 跳 n 次的计算

我们不妨先从跳 3 次在定圆内概率进行讨论。

（I）当$1 \leq r_3 \leq 3$时，$r_3 - 1 \leq r_2 \leq 2$如图 6 所示。

设经过前两次的跳到了c_2上的点 A

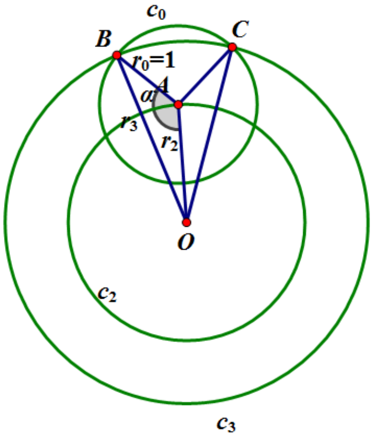

图 6

易知从 O 跳到 r_2 的概率为$Q_2(r_2) \cdot dx$。由余弦定理，可得:

$$r_0^2 + r_2^2 - 2r_0r_2cos\alpha = r_3^2$$

$$\therefore \alpha = arccos\frac{r_0^2 + r_2^2 - r_3^2}{2r_0r_2}$$

因此，经圆 c_2跳到圆 c_3上的概率为$Q_2(r_2)\cdot dr_2\cdot\frac{arccos\frac{r_0^2+r_2^2-r_3^2}{2r_0r_2}}{\pi}$。

因此，经过 3 跳到半径为 r_3的圆 c_3内的概率为：

$$\int_{r_3-1}^{2} Q_2(r_2)\cdot dr_2\cdot\frac{arccos\frac{r_0^2+r_2^2-r_3^2}{2r_0r_2}}{\pi}$$

用 x 替换 r_2，已知 r_0=1：

$$P_3(r_3)=\int_{r_3-1}^{2} Q_2(x)\frac{arccos\frac{1+x^2-r_3^2}{2x}}{\pi}dx,(1\le r_3\le 3)$$

（II）当$0\le r_3<1$时，$0\le r_2\le r_3+1$如图 7。同理假设经过前两次的跳到了 c_2，那么再跳第三次时只能落在距离原点$[0,r_2+1]$这样一个范围。

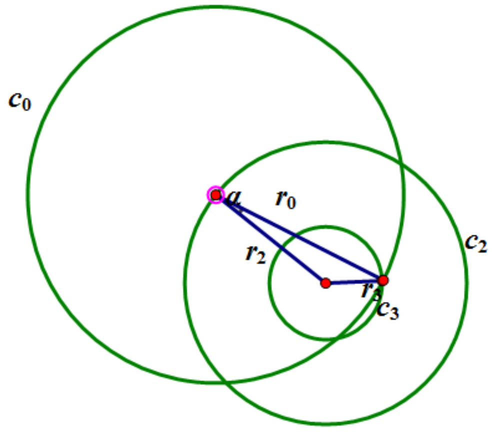

图 7

同理可得

$$P_3(r_3)=\int_{0}^{r_3+1} Q_2(x)\frac{arccos\frac{1+x^2-r_3^2}{2x}}{\pi}dx,(0\le r_3<1)$$

综上所述

平面青蛙跳 3 次概率函数为

$$P_3(r_3)=\begin{cases}\int_{0}^{r_3+1} Q_2(x)\frac{arccos\frac{1+x^2-r_3^2}{2x}}{\pi}dx\,,(0\le r_3<1)\\ \int_{r_3-1}^{2} Q_2(x)\frac{arccos\frac{1+x^2-r_3^2}{2x}}{\pi}dx,(1\le r_3\le 3)\end{cases}$$

即

$$P_3(r_3)=\int_{max(r_3-1,0)}^{min(r_3+1,2)} Q_2(x)\frac{arccos\frac{1+x^2-r_3^2}{2x}}{\pi}dx,(0\le r_3\le 3)$$

进而，平面青蛙跳 3 次概率场强度函数为

$$Q_3(r_3) = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dr_3}}\left(\int_{\boldsymbol{max(r_3-1,0)}}^{\boldsymbol{min(2,r_3+1)}} Q_2(x)\frac{arccos\frac{1+x^2-r_3^2}{2x}}{\pi}dx\right), (0 \le r_3 \le 3)$$

同理，平面青蛙跳 4 次概率场强度函数为

$$P_4(r_4) = \int_{\boldsymbol{max(r_4-1,0)}}^{\boldsymbol{min(r_4+1,3)}} Q_3(x)\frac{arccos\frac{1+x^2-r_4^2}{2x}}{\pi}dx, (0 \le r_4 \le 4)$$

因此，平面青蛙跳 m 次概率函数为，$m \ge 3, m \in N$

$$P_m(r_m) = \int_{\boldsymbol{max(0,r_m-1)}}^{\boldsymbol{min(m-1,r_m+1)}} Q_{m-1}(x)\frac{arccos\frac{1+x^2-r_m^2}{2x}}{\pi}dx, (0 \le r_m \le m)$$

平面青蛙跳 m 次概率场强度函数为

$$Q_m(r_m) = \frac{d}{dr_m}\left(\int_{\boldsymbol{max(0,r_m-1)}}^{\boldsymbol{min(m-1,r_m+1)}} Q_{m-1}(x)\frac{arccos\frac{1+x^2-r_m^2}{2x}}{\pi}dx\right), (0 \le r_m \le m)$$

- **多维空间的情况**

先从青蛙在三维空间跳两次的情况进行讨论。设青蛙跳完第二次后距离原点的距离为 x。

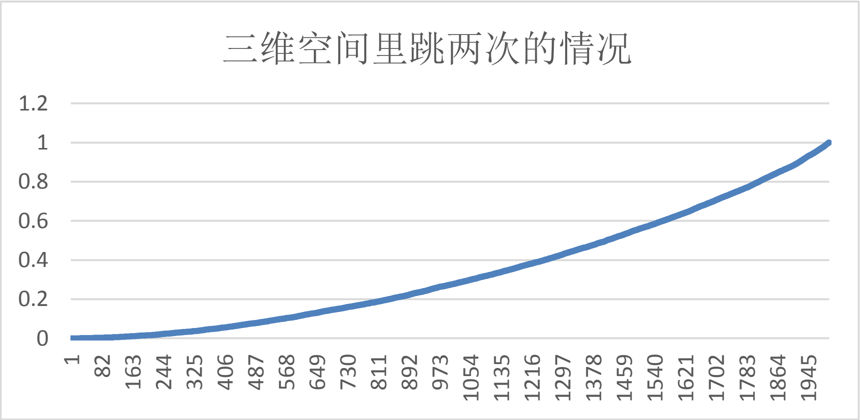

图 8

首先，青蛙第一步跳到哪里是无关紧要的。

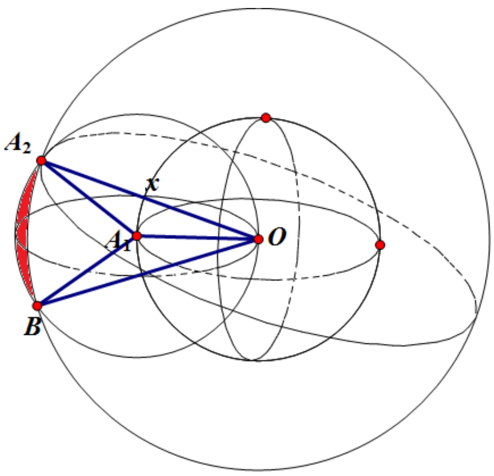

图 9

因为第二步同样跳 1 米，所以它一定是在球A_1的球壳上。又因为第二步的落点在球壳上分布是均匀的，所以$P_{3D}=\frac{球A_1的表面积-红色区域}{球A_1的表面积}$,。

设第二步跳到了距离 0 点 x 米的位置。

由球冠表面积公式可得，$S_{红}=2\pi Rh=2\pi(1-cos(2\,arccos\frac{x}{2}))$

因此，三维青蛙跳两次概率函数为$P_{3D2}=\frac{4\pi-2\pi\left(1-cos\left(2\,arccos\frac{x}{2}\right)\right)}{4\pi}$

经化简得：

$$P_{3D2}=\frac{cos\left(2arccos\frac{x}{2}\right)+1}{2}=\frac{2\,cos^2(arccos\frac{x}{2})}{2}=\frac{x^2}{4},(0\le x\le 2)$$

下面讨论四维以及四维以上空间跳两次的情况。

引理 1：

$$\int_0^{\vartheta} sin^n x\,dx=\begin{cases}\frac{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2} x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{n-2} x\,dx}(\pi\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{2i-1}{2i})-\frac{cos\vartheta\cdot sin^{n-1}\vartheta}{n} & 2|n\\ \frac{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2} x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{n-2} x\,dx}(2\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2i}{2i+1})-\frac{cos\vartheta\cdot sin^{n-1}\vartheta}{n} & 2\nmid n\end{cases}$$

证明：

$$\int sin^n x\,dx=-\int sin^{n-1} x\,dcosx=-cosx\cdot sin^{n-1} x+\int cosx\,dsin^{n-1}$$

$$\int_0^{\vartheta} sin^n x\,dx=-\int_0^{\vartheta} sin^{n-1} x\,dcosx=-cosx\cdot sin^{n-1} x\ |_0^{\vartheta}+\int_0^{\vartheta} cosx\,dsin^{n-1}x$$

$$\int_0^{\vartheta} sin^n x\,dx+cosx\cdot sin^{n-1} x\ |_0^{\vartheta}=(n-1)\int_0^{\vartheta} sin^{n-2} x\,dx-(n-1)+\int_0^{\vartheta} sin^n x\,dx$$

所以

$$\frac{\int_0^{\vartheta} sin^n x\,dx + \frac{cosx\cdot sin^{n-1}x\ |_0^{\vartheta}}{n}}{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2} x\,dx} = \frac{n-1}{n}$$

(I) 当 n 是偶数时

$$\int_0^{\vartheta} sin^n x\,dx + \frac{cosx\cdot sin^{n-1}x\ |_0^{\vartheta}}{n}$$

$$= \frac{\int_0^{\vartheta} sin^n x\,dx + \frac{cosx\,sin^{n-1}x\ |_0^{\vartheta}}{n-1}}{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2} x\,dx}\cdot\frac{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2}x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{n-2}x\,dx}\cdot\frac{\int_0^{\pi} sin^{n-2}x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{n-4}x\,dx}\cdot\cdots$$

$$\cdot\frac{\int_0^{\pi} sin^4 x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^2 x\,dx}\cdot\frac{\int_0^{\pi} sin^2 x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^0 x\,dx}\cdot\int_0^{\pi} sin^0 x\,dx$$

$$= \frac{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2}x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{n-2}x\,dx}\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi} sin^0 x\,dx\right)$$

$$= \frac{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2}x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{n-2}x\,dx}\left(\pi\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{2i-1}{2i}\right)$$

$$\int_0^{\vartheta} sin^n x\,dx = \frac{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2}x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{n-2}x\,dx}\left(\pi\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{2i-1}{2i}\right) - \frac{\left(cosx\cdot sin^{n-1}x\ |_0^{\vartheta}\right)}{n}$$

$$= \frac{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2}x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{n-2}x\,dx}\left(\pi\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{2i-1}{2i}\right) - \frac{cosx\cdot sin^{n-1}x\ |_0^{\vartheta}}{n}$$

$$= \frac{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2}x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{n-2}x\,dx}\left(\pi\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{2i-1}{2i}\right) - \frac{cos\theta\cdot sin^{n-1}\vartheta}{n}$$

(II) n 是奇数时

$$\int_0^{\vartheta} sin^n x\,dx + \frac{cosx\cdot sin^{n-1}x\ |_0^{\vartheta}}{n}$$

$$= \frac{\int_0^{\vartheta} sin^n x\,dx + \frac{cosx\,sin^{n-1}x\ |_0^{\vartheta}}{n-1}}{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2} x\,dx}\cdot\frac{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2}x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{n-2}x\,dx}\cdot\frac{\int_0^{\pi} sin^{n-2}x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{n-4}x\,dx}\cdot\cdots$$

$$\cdot\frac{\int_0^{\pi} sin^5 x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^3 x\,dx}\cdot\frac{\int_0^{\pi} sin^3 x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^1 x\,dx}\cdot\int_0^{\pi} sin^1 x\,dx$$

$$= \frac{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2}x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{n-2}x\,dx}\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\int_0^{\pi} sin^1 x\,dx\right)$$

$$= \frac{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2}x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{n-2}x\,dx}\left(2\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2i}{2i+1}\right)$$

$$\int_0^{\vartheta} sin^n x\, dx = \frac{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2} x\, dx}{\int_0^{\pi} sin^{n-2} x\, dx}(2\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2i}{2i+1}) - \frac{\left(cosx \cdot sin^{n-1} x\ |_0^{\vartheta}\right)}{n}$$

$$= \frac{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2} x\, dx}{\int_0^{\pi} sin^{n-2} x\, dx}(2\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2i}{2i+1}) - \frac{cosx \cdot sin^{n-1} x\ |_0^{\vartheta}}{n}$$

$$= \frac{\int_0^{\vartheta} sin^{n-2} x\, dx}{\int_0^{\pi} sin^{n-2} x\, dx}(2\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2i}{2i+1}) - \frac{cos\theta \cdot sin^{n-1} \vartheta}{n}$$

证毕！

引理 2：

$$\int_0^{\pi} sin^n x \cdot dx \cdot \int_0^{\pi} sin^{n+1} y \cdot dy = \frac{2\pi}{n+1}, n \in N$$

证明：

由引理 1，令$\theta = \pi$，

$$\int_0^{\pi} sin^n x\, dx = \begin{cases} 2\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2i}{2i+1} & 2 \nmid n \\ \pi\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{2i-1}{2i} & 2|n \end{cases}$$

(I)当 n 为偶数时：

$$\int_0^{\pi} sin^n x \cdot dx \cdot \int_0^{\pi} sin^{n+1} y \cdot dy = 2\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{2i-1}{2i} \cdot \pi\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{2i}{2i+1}$$

$$= \frac{2\pi}{n+1}\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2i-1}{2i} \cdot \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2i}{2i-1} = \frac{2\pi}{n+1}$$

(II)当 n 为奇数时：

$$\int_0^{\pi} sin^n x \cdot dx \cdot \int_0^{\pi} sin^{n+1} y \cdot dy = 2\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2i}{2i+1} \cdot \pi\prod_{i=1}^{\frac{n+1}{2}}\frac{2i-1}{2i}$$

$$= \frac{2\pi}{n+1}\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2i}{2i+1} \cdot \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2i+1}{2i} = \frac{2\pi}{n+1}$$

证毕！

引理 3： N 维球(N ≥ 2)的表面积满足

$$S_N(r)=\begin{cases}(2\pi r^2)^{\left(\frac{N-2}{2}\right)}\cdot\left(\prod_{i=1}^{\frac{N-2}{2}}\frac{1}{2i}\right)\cdot 2\pi r & 2|n\\ (2\pi r^2)^{\left(\frac{N-3}{2}\right)}\cdot\left(\prod_{i=1}^{\frac{N-3}{2}}\frac{1}{2i+1}\right)\cdot 4\pi r^2 & 2\nmid n\end{cases}$$

证明：

当 N=2 时，$S_2(r)=2\pi r$，引理 2 成立；
当 N=3 时，$S_3(r)=4\pi r^2$，引理 2 成立；
当 N>3 时，

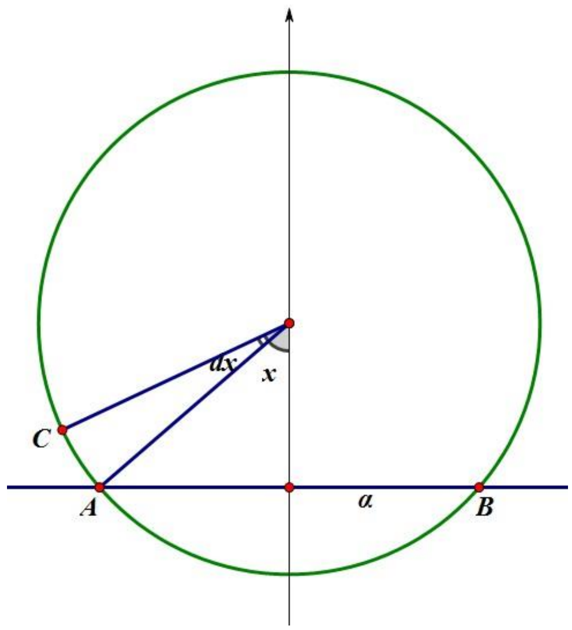

图 10

如图 10，在 N 维空间中用一个垂直于 x 轴的(N-1)维空间α截该 N 维球体，得到一个(N-1)维球壳（即图中 AB 之间的部分）。设该(N-1)维球壳在 N 维球中所对应的球心角的一半为x，则得到的(N-1)维球壳的半径为$r\cdot sinx$。将x微分，乘以该 N 维球的半径，即得到球上的一小段弧长$r\cdot dx$。将得到的(N-1)维球的表面积乘上球上的一小段弧，即得到了 N 维球壳表面积的一部分：

$$S_{N-1}(r\cdot sinx)\cdot r\cdot dx$$

将其关于x积分，即得到 N 维球冠的表面积：

$$Z_N(r,\vartheta)=\int_0^{\vartheta}S_{N-1}(r\cdot sinx)\cdot r\cdot dx$$

令$\theta=\pi$，即得到 N 维球体的表面积公式：

$$S_N(r)=\int_0^{\pi}S_{N-1}(r\cdot sinx)\cdot r\cdot dx$$

因此，设$S_{N-2}(r)=a_{N-2}\pi^{b_{N-2}}r^{N-3}$

$$S_N(r)=\int_0^{\pi}S_{N-1}(r\cdot sinx)r\cdot dx=\int_0^{\pi}(\int_0^{\pi}S_{N-2}(r\cdot sinx\cdot siny)r\cdot sinx\cdot dy)r\cdot dx$$

$$=r^2\int_0^{\pi}sinx\cdot\int_0^{\pi}S_{N-2}(r\cdot siny)dx\cdot dy$$

$$=r^2\int_0^{\pi}sinx\cdot\int_0^{\pi}a_{N-2}\pi^{b_{N-2}}(r\cdot siny)^{N-3}dx\cdot dy$$

$$=r^{N-1}\cdot a_{N-2}\pi^{b_{N-2}}\int_0^{\pi}\sin^{N-2}x\left(\int_0^{\pi}\sin^{N-3}y\cdot dy\right)dx$$

$$=r^{N-1}a_{N-2}\pi^{b_{N-2}}(\int_0^{\pi}\sin^{N-2}x\cdot dx)\cdot(\int_0^{\pi}\sin^{N-3}y\cdot dy)$$

又由引理 2

$$\int_0^{\pi}sin^{N-2}x\cdot dx\cdot\int_0^{\pi}sin^{N-3}y\cdot dy=\frac{2\pi}{N-2}$$

$$\therefore S_N(r)=a_{N-2}\pi^{b_{N-2}}r^{N-1}\cdot\frac{2\pi}{N-2}=\frac{2\pi r^2}{N-2}S_{N-2}(r)$$

(I) 当 N 为偶数时

$$S_N(r)=a_{N-2}\pi^{b_{N-2}}r^{N-1}\cdot\frac{2\pi}{N-2}=\frac{2\pi r^2}{N-2}S_{N-2}(r)=\frac{2\pi r^2}{N-2}\cdot\frac{2\pi r^2}{N-4}\cdot S_{N-4}(r)=\cdots\cdots$$

$$=(2\pi r^2)^{\left(\frac{N-2}{2}\right)}\cdot\left(\prod_{i=1}^{\frac{N-2}{2}}\frac{1}{2i}\right)\cdot S_2(r)=(2\pi r^2)^{\left(\frac{N-2}{2}\right)}\cdot\left(\prod_{i=1}^{\frac{N-2}{2}}\frac{1}{2i}\right)\cdot 2\pi r$$

(II) 当 N 为奇数时

$$S_N(r)=a_{N-2}\pi^{b_{N-2}}r^{N-1}\cdot\frac{2\pi}{N-2}=\frac{2\pi r^2}{N-2}S_{N-2}(r)=\frac{2\pi r^2}{N-2}\cdot\frac{2\pi r^2}{N-4}\cdot S_{N-4}(r)=\cdots\cdots$$

$$=(2\pi r^2)^{\left(\frac{N-3}{2}\right)}\cdot\left(\prod_{i=1}^{\frac{N-3}{2}}\frac{1}{2i+1}\right)\cdot S_3(r)=(2\pi r^2)^{\left(\frac{N-3}{2}\right)}\cdot\left(\prod_{i=1}^{\frac{N-3}{2}}\frac{1}{2i+1}\right)\cdot 4\pi r^2$$

证毕！

由引理 3，设

$$\mathrm{S_N}(r)=\ a_N\,\pi^{b_N}(r)^{N-1}$$

则：

$$Z_N(r,\vartheta)=\int_0^{\vartheta}a_{N-1}\,\pi^{b_{N-1}}(r\cdot sinx)^{N-2}r\cdot dx=a_{N-1}\,\pi^{b_{N-1}}r^{n-1}\int_0^{\vartheta}\sin^{N-2}x\,dx$$

$$S_N(r)=\int_0^{\pi}S_{N-1}(r\cdot sinx)r\cdot dx=a_{N-1}\,\pi^{b_N-1}r^{n-1}\int_0^{\pi}\sin^{N-2}x\,dx$$

因为青蛙每次跳 1 步，所以

$$r=1$$

$$P_{ND2}(x)=\frac{S_N(1)-Z_N(1,\vartheta)}{S_N(1)}$$

$$=\frac{a_{N-1}\,\pi^{b_{N-1}}r^{N-1}\int_0^{\pi} sin^{N-2}x\,dx-a_{N-1}\,\pi^{b_{N-1}}r^{N-1}\int_0^{\vartheta} sin^{N-2}x\,dx}{a_{N-1}\,\pi^{b_{N-1}}r^{N-1}\int_0^{\pi} sin^{N-2}x\,dx}$$

$$=\frac{\int_0^{\pi} sin^{N-2}x\,dx-\int_0^{\vartheta} sin^{N-2}x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{N-2}x\,dx}=1-\frac{\int_0^{\vartheta} sin^{N-2}x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{N-2}x\,dx}$$

由引理 1，引理 2

(I) 当 N 是偶数时

$$\int_0^{\vartheta} sin^{N-2}x\,dx=\frac{\int_0^{\vartheta} sin^{N-4}x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{N-4}x\,dx}(\pi\prod_{i=1}^{\frac{N-2}{2}}\frac{2i-1}{2i})-\frac{cos\vartheta\cdot sin^{N-3}\vartheta}{N-2}$$

$$\frac{\int_0^{\vartheta} sin^{N-4}x\,dx}{\int_0^{\pi} sin^{N-4}x\,dx}=P_{(N-2)D2}(x)$$

$$\int_0^{\vartheta} sin^{N-2}x\,dx=P_{(N-2)D2}(x)(\pi\prod_{i=1}^{\frac{N-2}{2}}\frac{2i-1}{2i})-\frac{cos\vartheta\cdot sin^{N-3}\vartheta}{N-2}$$

$$P_{ND2}(x)=1-\frac{P_{(N-2)D2}(x)\left(\pi\prod_{i=1}^{\frac{N-2}{2}}\frac{2i-1}{2i}\right)-\frac{cos\vartheta\cdot sin^{N-3}\vartheta}{N-2}}{\int_0^{\pi} sin^{N-2}x\,dx}$$

$$=1-\frac{P_{(N-2)D2}(x)\left(\pi\prod_{i=1}^{\frac{N-2}{2}}\frac{2i-1}{2i}\right)-\frac{cos\vartheta\cdot sin^{N-3}\vartheta}{N-2}}{\pi\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{2i-1}{2i}}$$

(II) 当 N 是奇数时，同理

$$P_{ND2}(x)=1-\frac{P_{(N-2)D2}(x)(2\prod_{i=1}^{\frac{N-3}{2}}\frac{2i}{2i+1})-\frac{cos\vartheta\cdot sin^{N-3}\vartheta}{N-2}}{2\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2i}{2i+1}}$$

综上所述，N 维青蛙跳 2 次概率函数：

$$P_{ND2}(x)=\begin{cases}1-\dfrac{P_{(N-2)D2}(x)\left(\pi\prod_{i=1}^{\frac{N-2}{2}}\frac{2i-1}{2i}\right)-\frac{cos\vartheta\, sin^{N-3}\vartheta}{N-2}}{\pi\prod_{i=1}^{\frac{N}{2}}\frac{2i-1}{2i}}, N=2k,(k\in N^+,k\geq 2)\\ 1-\dfrac{P_{(N-2)D2}(x)\left(2\prod_{i=1}^{\frac{N-3}{2}}\frac{2i}{2i+1}\right)-\frac{cos\vartheta\, sin^{N-3}\vartheta}{N-2}}{2\prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}}\frac{2i}{2i+1}}, N=2k+1(k\in N^+,k\geq 2)\end{cases}$$

其中

$$\vartheta=arccos\frac{x}{2}, x\in[0,2]$$

同理于平面上青蛙跳 m 次落在距离原点 x 米以内的概率公式，可得到青蛙在 N 维里跳 m 次的落在距离原点 x 米以内的概率公式。

【定义】$P_{NDm}(x)$在 N 维空间中青蛙跳 m 次概率函数，$Q_{NDm}(x) = P_{NDm}'(x)$为 N 维空间中青蛙跳 m 次概率场强度函数，$x \in [0, m]$ 。

假设青蛙跳完第 m-1 步时距离原点的距离为 y 米，那么青蛙恰好跳到这个半径为 y 米的 N 维球上的概率为：

$$dP_{NDm-1}(y) = P'_{NDm-1}(y) \cdot dx$$

从该球壳上跳到距离原点 x 米以内的概率为：

$$p(y) = \frac{\int_0^{arccos\frac{1+y^2-x^2}{2y}} S_{N-1}(sinz) \cdot dz}{\int_0^{\pi} S_{N-1}(sinz) r \cdot dz}$$

所以青蛙从原点出发，第 m-1 步恰好落在半径为 y 米的 N 维球上，再落到距离原点 x 米以内的概率为

$$dP_{NDm-1}(y) \cdot p(y)$$

又$max(x-1,0) \le y \le min(x+1, m-1)$，所以 N 维青蛙跳 m 次概率函数为：

$$P_{NDm}(x) = \int_{min(x-1,0)}^{max(m-1,x+1)} p(y) \cdot dP_{NDm-1}(y)$$

即：

$$P_{NDm}(x) = \int_{max(0,x-1)}^{min(m-1,x+1)} P'_{NDm-1}(y) \frac{\int_0^{arccos\frac{1+y^2-x^2}{2y}} S_{N-1}(sinz) \cdot dz}{\int_0^{\pi} S_{N-1}(sinz) r \cdot dz} dy, \mathrm{x} \in [0, \mathrm{m}]$$

参考文献：

2010 年 AMC 12B 试题

致谢：感谢清华大学附属中学 G1208 班王芝菁同学在写论文的过程中给予的帮助。

附录：

程序 1：随机生成 10000 个数据

```
#include <iostream>
#include <math.h>
#include <time.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
const long int TIME=10000;
const int STEP=2;
using namespace std;
double dis[TIME];
int count1=0,count2=0;
int main()
{
    freopen("data.txt","w",stdout);
    double angle,x,y;
    long int i,j;
    srand(time(0));
    for (i=0;i<TIME;i++)
    {
        x=0;y=0;
        for (j=0;j<STEP;j++)
        {
            angle=(rand()%6283)/pow(10,3);
            x+=cos(angle);
            y+=sin(angle);
        }
        dis[i]=sqrt(x*x+y*y);
        printf("%.3lf", dis[i]);
        cout<<endl;
    }
    fclose(stdout);
    return 0;
}
```

程序 2：跳两次的不同距离内的概率计算

```
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <map>
using namespace std;
const long int TIME=10000;
map<float,int> a;
int main()
```

```
{
    freopen("data.txt","r",stdin);
    freopen("result.txt","w",stdout);
    int i,j;
    float temp;
    a.clear();
    for (i=0;i<TIME;i++)
    {
        cin>>temp;
        for (j=0;j<=int(temp*1000);j++)
            a[j]--;
    }
    for (i=0;i<=2000;i++)
    {
        cout<<float(TIME+a[i])/float(TIME)<<endl;
    }
    fclose(stdin);
    fclose(stdout);
    return 0;
}
```

程序 3：三维空间跳两次的模拟

```
#include <iostream>
#include <math.h>
#include <time.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
const long int TIME=10000;
const int STEP=2;
using namespace std;
double dis[TIME];
int count1=0,count2=0;
int main()
{
    freopen("data.txt","w",stdout);
    double angle,x,y,z;
    long int i,j;
    srand(time(0));
    for (i=0;i<TIME;i++)
    {
        x=0;y=0;z=0;
        for (j=0;j<STEP;j++)
        {
            angle=(rand()%6283)/pow(10,3);
```

```
            //cout<<angle<<' ';
            double a;
            a=sin(angle);
            x+=a;
            angle=(rand()%6283)/pow(10,3);
            //cout<<angle<<' ';
            z+=sin(angle)*sqrt(1-a*a);
            y+=cos(angle)*sqrt(1-a*a);
        }
        dis[i]=sqrt(x*x+y*y+z*z);
        printf("%.3lf", dis[i]);
        cout<<endl;
    }
    fclose(stdout);
    return 0;
}
```